

# 一种快速的小波变换图象编码算法

乔世杰

(西安交通大学电信学院, 西安 710049)

智贵连

(西安电力高等专科学校, 西安 710043)

**摘要** 首先分析并指出了对于零数编码来说,小波变换时应当使用原始滤波器系数参与运算,而对滤波器系数进行缩放会影响其编码性能.此外,低通滤波器时延参数对零树编码性能也有重要影响.为了保证小波变换后各小波子带图象之间的自相似性,就必须使低通滤波器的时延为零.在此基础上,针对具有二进系数的双正交小波滤波器,提出了一种适合零树编码的快速小波变换算法,此算法不但以移位代替了乘法运算,而且与使用原始滤波器系数的变换等效.最后,结合快速零树编码算法,实现了一种快速高效的编码系统.

**关键词** 双正交小波变换 快速算法 滤波器时延 零树编码

中图分类号: TN919.8 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)05-0434-05

## A Fast Wavelet Transform Image Coding

QIAO Shi-jie

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

ZHI Gui-lian

(Xi'an Academy of Electric Power, Xi'an 710032)

**Abstract** This paper points out that for the embedded zerotree wavelet(EZW) image coding, the discrete wavelet transform(DWT) must be calculated with the original coefficient of the filters,scaling the coefficient of the filters can influence the performance of the coding. The delay of the low-pass filter also has important effect on the coding performance,in order to ensure the self-similarity among the images of the wavelet subbands,the delay of the low-pass filter must be zero. By using the character of biorthogonal wavelets,which have dyadic rational filter coefficients,this paper presents a fast multiplierless DWT algorithm,which is very suitable for EZW image coding. The multiplierless DWT can be performed with only bit-shift and integer addition operations,and moreover,the result of the multiplierless DWT is equivalent to the original DWT which is calculated with the original coefficient of the filters. At last,combining with the fast EZW algorithms,a fast and high performance image coding system is presented.

**Keywords** Biorthogonal wavelet transform, Fast algorithm, Filter delay, Zerotree image coding

## 0 引言

由于小波变换在时域和频域同时具有良好的局部性质,并具有描述非平稳图象信号的本领和适应人视觉特性的良好性质,因而成为图象编码领域研究的热点.然而,由于小波滤波器系数一般都不是整数,这样小波变换的计算就需要大量的浮点乘法运算,从而给实时小波变换带来困难,但是在双正交小波滤波器家族中,存在一些系数为二进小数的小

波滤波器,它们为实现不用乘法的小波变换提供了可能.文献[1]提供了一种构造具有二进小数系数的双正交小波滤波器的方法.这些滤波器的特点是其系数中都含有公因子 $\sqrt{2}$ ,如果将公因子 $\sqrt{2}$ 提取出来,则其系数的分母都是2的幂.为了避免浮点乘法运算,实现快速变换,常用的方法就是将滤波器系数用 $\sqrt{2}$ 进行缩放,即将滤波器系数乘以或除以 $\sqrt{2}$ ,从而使得在输入数据为整数的情况下,可以用移位操作和加法运算来完成小波变换.文献[2]就是针对这样的一组滤波器提出了一种没有乘法的快

速小波变换算法,并在无损压缩方面取得了较好的结果,但当此快速算法直接用于零树编码 SPIHT<sup>[3]</sup>,以进行有损压缩时,却发现其性能比直接使用原始滤波器系数进行变换后,再用零树算法进行编码的方法差很多.经分析发现,对零树编码来说,应当使用原始滤波器系数参与运算,因为对滤波器系数进行缩放会影响其编码性能;此外,低通滤波器时延参数对零树编码性能也有重要影响.针对以上两点,本文提出了一种适合零树编码的快速算法,即通过将公因子  $\sqrt{2}$  提取出来,并采用每级二维变换完以后,再进行处理的方法.这样由于不用对滤波器系数用  $\sqrt{2}$  进行缩放,从而去掉了浮点乘法运算,实现了快速小波变换,而且其变换结果与直接用原始滤波器系数进行计算等效;本文同时对低通滤波器的时延问题提出了自己的见解;最后,结合快速零树编码算法 SPIHT,实现了一个快速编码系统,因而在较大范围都获得了高的编码性能.

## 1 没有浮点乘法的快速小波变换

本文所使用的双正交小波滤波器组中的低通和高通分析小波滤波器  $H_0(z)$ 、 $H_1(z)$  如下

$$\begin{cases} H_0(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2) \\ H_1(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-z^{-1} + 2 - z) \end{cases} \quad (1)$$

### 1.1 H. Kim 快速小波变换

Kim 利用式(1)所示的滤波器组构造了一种没有乘法的快速小波变换算法<sup>[2]</sup>.为了去掉浮点乘法运算,必须将滤波器系数用  $\sqrt{2}$  进行缩放,即用  $h_0(n)/\sqrt{2}$  和  $\sqrt{2}h_1(n)$  进行变换,其缩放后的系数如下式所示

$$\begin{cases} H_0(z) = \frac{1}{8}(-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2) \\ H_1(z) = \frac{1}{2}(-z^{-1} + 2 - z) \end{cases} \quad (2)$$

从式(2)可以看出,由于滤波器系数的分母都是 2 的幂,因而小波变换可以用移位和加法来实现,即小波变换的细节信号  $d(n)$  和低通信号  $s(n)$  可按如下式计算

$$\begin{cases} s(n) = \sum_{m=-3}^1 h_0(m)x(2n-m) \\ d(n) = \sum_{m=-1}^1 h_1(m)x(2n-m) \end{cases} \quad (3)$$

从式(3)可以看出,由于其对低通滤波器进行了移位,并使低通滤波器有一个样本的超前,因此低通滤波器  $h_0(n)$  ( $-3 \leq n \leq 1$ ) 的对称中心位于  $n = -1$ .

仔细观察式(2)的滤波器系数,可以发现低通分析滤波器系数中有相似于高通分析滤波器系数  $\{-1, 2, -1\}$  的分量,即  $\{-1, 2, 6, 2, -1\} = \{-1, 2, (-1+8-1), 2, -1\}$ ,利用这一特点可以进一步剔除计算中的冗余.若将式(2)中的系数带入式(3),并化简,则可得如下式定义的快速算法.

$$\begin{cases} d(n) = x(2n) - \left[ \frac{x(2n-1) + x(2n+1)}{2} \right] \\ s(n) = x(2n+1) + \left[ \frac{d(n) + d(n+1) + 2}{4} \right] \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $x(n)$  为输入信号,符号  $[x]$  表示取不大于  $x$  的整数.在输入信号为整数的情况下,由于除以 2 和除以 4 均可以用右移实现,因此,式(4)所定义的变换完全没有浮点乘法运算,从而实现了快速小波变换.

文献[2]利用式(4)的变换,结合哈夫曼编码/算术编码实现了一个无损压缩编码系统,并获得了优于 JPEG 无损编码的结果.

由于零树编码算法<sup>[3,4]</sup>是一种非常有效的小波变换编码算法,而且修正的零树编码算法 SPIHT 更可以不依赖熵编码,就可以获得很高的编码性能,因此本文试图直接将此快速算法与零树编码 SPIHT 相结合,以获得一个快速的有损编码系统,但通过编码实践,却发现其性能比直接使用原始滤波器系数进行变换,并用零树算法进行编码的方法差很多.另经分析发现,对零树编码来说,应当用原始的滤波器系数参与运算,若对滤波器系数进行缩放,则会影响零树编码的性能,此外,低通滤波器的时延不为零,也对零树编码性能有重要影响.

### 1.2 滤波器系数缩放对零树编码性能的影响

从式(2)可知,在式(4)的变换中,为了去掉浮点乘法运算,用  $\sqrt{2}$  对滤波器系数进行了缩放,虽然这种缩放对各个小波子带单独进行矢量量化,并进行熵编码,不会有什么影响.但对零树编码则可能会带来不利影响.

零树编码是利用小波变换后的各子带图象数据之间的自相似性,来将变换后的图象数据组织成一种树状结构,其子带图象数据之间的父子关系如图 1 所示<sup>[4]</sup>.

对于给定的阈值  $T = 2^n$  ( $n \in Z, 0 \leq n \leq \log_2 \{\max(C_{i,j})\}$ ),如果变换系数  $C_{i,j}$  的绝对值小于  $T$ ,则认为

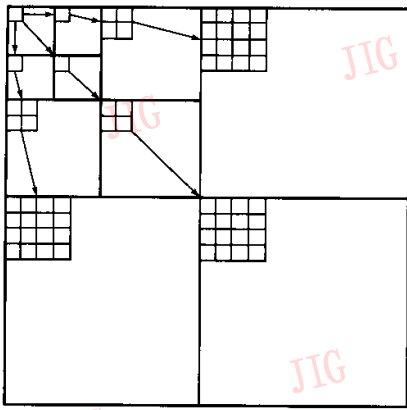


图1 子带数据之间的父子关系

此系数相对于阈值  $T$  是不重要的, 否则, 可认为其是重要的. 而零树则是指, 如果低频子带中的一个系数(父节点)相对于阈值  $T$  是不重要的, 并且在相同方向、相同空间位置上的高频子带的所有系数(子孙节点)相对于阈值  $T$  也都是不重要的, 那么这些小波系数即组成一棵零树, 其父节点称为零树根, 而且利用该零树结构, 只用很少的编码位就可以对大量的不重要的系数进行编码, 而留下更多的编码位来编码那些重要的系数, 这也就是零树编码之所以高效率的原因. 可是, 若对滤波器系数进行缩放, 则可能会影响子带间系数值的相对能量分布, 也就会影响零树出现的概率, 从而影响零树编码性能.

对于普通的二维双正交小波变换来说, 由于低通和高通滤波器满足

$$\sum h_0(n) = \sqrt{2} \quad \sum h_1(n) = 0 \quad (5)$$

因而, 每进行一次二维变换, 其变换系数的动态范围都增大, 且随着变换级数增加, 能量越来越聚集在低频信号中, 而高频细节信号则相对很小, 且大部分接近于零. 根据式(1)和式(2)可以看出, 在式(4)的变换中, 虽然其细节信号  $d(n)$  比普通变换中的细节信号大  $\sqrt{2}$  倍, 但是其低通信号却比普通变换中的低通信号小  $\sqrt{2}$  倍, 这样, 每进行一次二维变换, 其水平低频垂直低频子带信号比普通变换小两倍, 而其水平高频、垂直高频子带信号却比普通变换大两倍, 显然, 由于这种使高频子带信号变大, 使低频子带信号变小的情况改变了子带间系数值的相对能量分布, 因此对于给定的阈值  $T$ , 就将使零树发生概率下降, 从而也影响了零树编码性能, 并且由于人眼对代表图象细节信息的水平高频、垂直高频子带信号并不敏感, 因此, 这种将滤波器系数用  $\sqrt{2}$  进行缩放来去掉浮点乘法的

方法, 对于零树编码来说, 并不适合.

通过实验还发现, 若采用与式(2)相反的缩放方法, 即用  $\sqrt{2} h_0(n)$  和  $h_1(n)/\sqrt{2}$  来进行变换, 其结果也不理想, 而且此时低通信号过大, 而细节信号相对过小. 进一步实验还得知, 即使对  $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  同时放大或缩小  $\sqrt{2}$  倍, 其零树分布都没有单独使用原始滤波器系数来进行变换的好, 且零树编码效果也不理想, 因此, 本文认为, 倘若要利用零树编码来对图象进行压缩, 就必须使用原始滤波器系数进行小波变换, 否则, 编码性能会下降.

### 1.3 低通滤波器时延对零树编码性能的影响

由式(4)可知, 低通滤波器的时延参数并不为零, 而实验发现, 这种低通滤波器时延不为零, 对零树编码性能也有不可忽视的影响.

大家知道, 如果低通滤波器时延不为零, 那么低通滤波器的输出信号, 在时序位置上则会产生移位. 虽然这对于无限长信号, 不会有什么不利影响, 但由于图象信号是有限长信号, 因此这种序列在时序上的移位, 则可能给后续的编码带来一些不利影响. 由于在多级小波变换中, 上一级变换的低频输出信号又要作为下一级变换的输入信号, 因此滤波器时延会使变换后的各个小波子带中的图象位置出现偏差. 参照图1可知, 由于这种位置偏差破坏了子带图象之间的自相似性, 因而使零树编码效率下降.

基于上述, 在小波变换时, 倘若不是对各个子带单独进行量化, 并编码, 而是要利用子带图象位置信息之间的相关性来进行编码, 就有必要考虑由低通滤波器时延所造成的移位信号对编码性能的影响. 由此可见, 为了使小波变换的结果不出现偏移, 就必须使低通小波滤波器的时延为零.

从以上两点的分析得知, 要利用零树编码来对图象进行压缩, 就要使用原始滤波器系数来进行小波变换, 而且变换时要求低通滤波器的时延为零.

### 1.4 新的快速小波变换

由上面的分析可见, 为了利用零树编码来实现快速高效的编码系统, 小波变换时, 最好用原始滤波器系数, 但利用原始滤波器系数进行计算将不可避免地要进行大量浮点乘法运算, 这将给实时小波变换带来困难. 可是仔细观察发现, 对可分离的二维小波变换来说, 直接用式(1)的原始滤波器系数进行计算时, 由于每进行一次一维小波变换, 滤波器系数中的公因子  $1/\sqrt{2}$  都要参与运算, 就需要进行大量浮

点乘法去年,但倘若将每一级二维小波变换中的两次  $1/\sqrt{2}$  提取出来,统一进行处理的话,就完全可以避免浮点乘法运算,因此,在进行小波变换时,不是使用式(1)的原始滤波器系数,而是使用下式的滤波器系数进行计算

$$\begin{cases} H_0(z) = \frac{1}{4}(-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2) \\ H_1(z) = \frac{1}{2}(-z^{-1} + 2 - z) \end{cases} \quad (6)$$

这样在每次一维小波变换时,就可暂不考虑因子  $1/\sqrt{2}$ ,但为了与直接使用原始滤波器系数计算等效,就必须在每一级二维小波变换完成以后,统一对这一级二维小波变换中的两次  $1/\sqrt{2}$  进行处理,即将此变换级的4个子带信号都除以2,这种除以2的运算可以用右移的办法来实现.这样不仅避免了浮点乘法运算,而且与直接使用原始滤波器系数来进行计算等效.

同时,为了不影响零树编码的性能,还需对滤波器适当移位,以便使低通滤波器的时延为零,即使低通滤波器  $h_0(n)$  ( $-2 \leq n \leq 2$ ) 的对称中心位于  $n=0$ ,为满足完全重构条件,高通滤波器应有一个样本的超前,也就是采用下面的公式来计算  $d(n)$  和  $s(n)$ .

$$\begin{cases} s(n) = \sum_{m=-2}^2 h_0(m)x(2n-m) \\ d(n) = \sum_{m=-2}^0 h_1(m)x(2n-m) \end{cases} \quad (7)$$

将式(6)的滤波器系数代入式(7),并化简,同时结合上面去掉浮点乘法的思想,即可得到如式(8)、式(9)所示的快速算法.

$$\begin{cases} d(n) = x(2n+1) - \left[ \frac{x(2n) + x(2n+2)}{2} \right] \\ s(n) = x(2n) + \left[ \frac{d(n-1) + d(n)}{2} \right] \end{cases} \quad (8)$$

$$C(i, j, l) = \left[ \frac{C(i, j, l)}{2} \right] \quad (9)$$

而式(8)的边界条件由式(10)给出.

$$\begin{cases} s(0) = 2x(0) + d(0) \\ d\left(\frac{N}{2}-1\right) = x(N-1) - x(N-2) \end{cases} \quad (10)$$

由此可以看出式(8)与式(4)“形似”,这是因为新算法仍然可以利用低通分析系数中有与高通分析系数相似的分量特点,从而能进一步剔除冗余计算的缘故.式(9)中,  $C(i, j, l)$  表示小波变换的子带系数,其中,  $(i, j)$  表示象素坐标,而  $l$  表示变换级.式

(9)表示利用式(8)计算出每一级二维小波变换系数以后,还必须对4个子带中的所有系数都除以2,才能作为此级的变换系数.

上面快速算法对利用零树编码来实现有损压缩编码非常适合,因为其实现没有乘法的快速算法的基本思想与式(4)不同,而且其变换结果与直接使用原始滤波器系数进行变换的算法等效,这一点对零树编码来说特别重要.此外,式(8)中低通滤波器的时延为零,从而保证了零树编码的性能.

利用上面的算法来实现小波变换,其计算复杂度与直接用浮点乘法相比大大降低.若输入图象数据为整数,那么计算  $d(n)$  只需要两次整数加法和一次右移操作;而计算  $s(n)$  也只需要两次整数加法、一次左移和一次右移操作.即使是不利用低通分析系数中那些与高通分析系数分量相似的特点,而直接用式(7)进行计算,即利用滤波器的对称性,来计算  $s(n)$  也只需要5次整数加法和4次右移操作,且  $d(n)$  的计算复杂度不变.此外,式(9)中对子带系数除以2的运算也只需要一次右移操作即可.

若直接用式(1)所示的原始滤波器系数来进行小波变换,则由于滤波器系数为无理数,因此按一定精度截取以后,所有的运算都必须采用浮点运算.尽管利用滤波器的对称性可以减少浮点乘法的次数,但计算  $d(n)$  仍需要两次浮点乘法和两次浮点加法,计算  $s(n)$  仍需要3次浮点乘法和4次浮点加法.

从上面的分析可知,本文提出的算法是一种快速的小波变换算法,而且对软硬件实现来说,加法运算和移位操作要比浮点乘法快得多,也简单得多.

## 2 实验结果

为了验证新算法的性能,本文还对灰度图象 Lena ( $512 \times 512$ ) 进行了5层变换,并用零树编码 SPIHT 算法对其进行了编码试验.为了实现快速编码,本文采用了没有算术编码的 SPIHT 算法.表1给出了新的快速变换算法和直接用滤波器原始系数,并采用浮点乘法运算进行小波变换,所获得的编码峰值信噪比,它们分别用“新算法+SPIHT”和“浮点乘法+SPIHT”表示.为了说明 H. Kim 变换确实不适合于零树编码,表中也给出了“H. Kim 算法+SPIHT”变换编码的峰值信噪比.由于文献[2]没有明确指出其有损编码是否采用了式(4)的变换,也没有给出所用的量化方法,因而无法与其进行有意义

的比较.

表 1 测试图象压缩后的峰值信噪比(dB)

压缩比	新算法+ SPIHT	浮点乘法+ SPIHT	H. kim 算法+ SPIHT
16 : 1	35.6	36.1	31.7
32 : 1	32.7	32.9	27.6
64 : 1	29.9	30.1	26.2
80 : 1	29.1	29.2	23.0

由表 1 可以看出,虽然采用整数运算,其误差将使新算法的  $PSNR$  比直接采用浮点运算稍有下降,但从视觉效果上看,二者相差无几,而且新算法的计算复杂度要小得多.

利用上面提出的快速算法,结合没有算术编码的快速 SPIHT 方案,本文构建了一种快速的没有算法的小波变换图象编码系统.

### 3 结 论

本文针对具有二进系数的双正交小波滤波器,用一种简单的办法使小波变换既避免了浮点乘法运算,又与使用原始滤波器系数的变换等效,从而实现了以移位代替乘法的快速变换.同时,本文还指出低通小波滤波器时延参数对零树编码性能有重要的影响,另外,本文还结合零树编码实现了一种快速高效的编码系统,为用软硬件实现小波变换图象编码提供了快速的途径.

虽然本文主要针对零树编码进行论述,但本文的算法也适合其他有损编码系统,如矢量量化编码等,且本文提出的解决  $\sqrt{2}$  问题的方法,对于那些具有与式(1)相似的二进系数小波滤波器都适用.另外,本文关于低通滤波器时延问题的讨论,对那些利用小波变换子带位置信息之间相关性的编码算法都有一定的指导意义.

### 参 考 文 献

- 1 Wei D, Tian J, Well R *et al.* A new class of biorthogonal wavelet systems for image transform coding. *IEEE Trans. Image Processing*, 1998, 7(7):1000~1013.
- 2 Kim H, Li C C. Lossless and lossy image compression using biorthogonal wavelet transforms with multiplierless operations. *IEEE Trans. Circuit and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1998, 45(8):1113~1118.
- 3 Said A, Pearlman W A. A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Trans. Circuit and System for Video Technology*, 1996, 6(3):243~249.
- 4 Shapiro J M. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12):3445~3462.

乔世杰 西安交通大学微电子学博士生. 研究兴趣为小波变换在图象及视频压缩中的应用、小波变换的 VLSI 实现等.

智贵连 1998 年获西安理工大学信号与信息处理专业学位. 研究兴趣为图象及视频信号处理等.